Signaux et Systèmes Discrets

Olivier Sentieys

ENSSAT - Université de Rennes 1
IRISA - Equipe de recherche R_2D^2

Olivier.Sentieys@enssat.fr

14 avril 2003

Plan

Introduction

1. Signaux à temps discret
2. Transformation en Z
3. Transformation de Fourier
4. Systèmes discrets
5. Échantillonnage et reconstruction des signaux

Introduction

Traitement (*numérique*) du signal :

1. **Modéliser** – ou identifier – consiste en l'analyse d'un signal ou d'un système, dans le domaine temporel ou fréquentiel (i.e. spectral). On parlera également d'estimation.
2. **Synthétiser** – ou générer – un signal.
3. **Transmettre** un ensemble de signaux sur un support.
4. **Transformer** un ensemble de signaux à l'aide d'un système linéaire (filtrer, moduler, coder, ...) ou non linéaire ($()^2$, $|\ |$, ...).

Classification des signaux

1. Dimensionnalité

   Fonction de la dimension du signal ou des dimensions des variables du signal :
   – Signal scalaire pouvant prendre des valeurs réelles ou complexes : $x(t)$
   – Signal vectoriel pouvant prendre des valeurs réelles ou complexes : $[R, V, B] = TV(t)$
   – Signal mono-dimensionnel qui correspond à des fonctions à un seul argument, comme par exemple le temps
   – Signal multi-dimensionnel qui correspond à des fonctions à plusieurs arguments : $[I] = TV(t, x, y)$

2. Caractéristiques temporelles
   – Signaux à temps continu ou signaux *analogiques*. La variable $t \in \mathbb{R}$. On notera un signal analogique de la façon suivante : $s_a(t)$

– Signaux à temps discret : ces signaux sont *définis* pour certaines valeurs de la variable t : $s(n) = s(nT) = s_(t)|_{t=nT}$

3. Valeurs prises par le signal
   – Signaux à valeurs continues pouvant prendre une valeur réelle dans un intervalle continue
   – Signaux à valeurs discrètes prenant seulement des valeurs parmi un ensemble fini de valeurs possibles : voir quantification

4. Prédictibilité des signaux
   – Signaux déterministes qui peuvent être représentés explicitement par une fonction mathématique
   – Signaux aléatoires qui évoluent dans le temps d'une manière imprévisible. Il est cependant possible de décrire mathématiquement certaines caractéristiques statistiques de ces signaux

1. Signaux à temps discrets

1. Définition
2. Opérations sur les signaux à temps discret
3. Signaux à temps discret de base
4. Propriétés des signaux à temps discret

1.1 Signaux à temps discret

– Séquence $\mathcal{X}$ de nombres dans laquelle le $n$ième nombre est $x(n)$. On écrira :

$$\mathcal{X} = \{x(n)\} \qquad -\infty < n < \infty$$

Exemple de signal discret

– $x(n)$ est égal à la valeur du signal analogique $x_a(t)$ au temps $t = nT$, i.e.

$$x(n) = x_a(nT) \qquad -\infty < n < \infty$$

– T : période d'échantillonnage, $f_e = \frac{1}{T}$: fréquence d'échantillonnage

Exemple de signal de parole : $T = ?$

1.2 Opérations sur les signaux à temps discret

1. $+$, $-$, $\times$ de signaux
2. $+$, $-$, $\times$ par une constante
3. Décalage de n_0 échantillons

$$y(n) = x(n - n_0)$$

4. Convolution
5. Corrélation
6. ...

1.3 Signaux à temps discret de base

1. Impulsion unité $\delta(n)$, $\delta(n-k)$
2. Echelon unité $u(n)$

$$u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k)$$

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta(k)$$

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$$

3. $x_1(n) = A\alpha^n$

   $x_2(n) = A\alpha^n u(n)$

4. Sinusoïde, Période = ?

$$x_3(n) = A\cos\left(n\omega_0 + \varphi\right)$$

5. Signal complexe

$$x_4(n) = e^{jn\omega_0}$$

6. Cas général

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k).$$

e.g. $p(n) = \delta(n) + 0.5\delta(n-2) - 0.5\delta(n-4)$

1.4 Propriétés des signaux à temps discret

1. Signaux causaux

$$x(n) = 0, \quad \forall n < 0$$

2. Énergie totale : finie ou infinie

$$E(\infty) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \tag{1}$$

3. Puissance moyenne : finie ou infinie

$$P_m \triangleq \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} |x(n)|^2 \tag{2}$$

4. Périodique de période P : $x(n+P) = x(n)\ \forall n$ sinon $x(n)$ est apériodique

5. Intercorrélation entre deux signaux $x(n)$ et $y(n)$

$$\mathcal{R}_{xy}(k) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)y(n+k) = \mathcal{R}_{yx}(-k) \tag{3}$$

6. Autocorrélation d'un signal $x(n)$

$$\mathcal{R}_{xx}(k) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)x(n+k) = \mathcal{R}_{xx}(-k) \tag{4}$$

7. Convolution linéaire entre deux signaux $x(n)$ et $y(n)$

$$\varphi_{xy}(k) = x(k) * y(k) \triangleq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)y(k-n) \tag{5}$$

2. Transformée en Z

1. Définition de la TZ
2. Domaine de convergence
3. Propriétés de la transformée en Z
4. Transformée en Z inverse

2.1 Définition de la transformée en Z

La transformée en Z directe bilatérale d'un signal à temps discret $x(n)$ est définie par :

$$Z\left[x(n)\right] = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \tag{6}$$

où z est une variable complexe ($z \in \mathbb{C}$) définie partout où cette série converge.

Les signaux discrets étant la plupart du temps causaux on définit plutôt la transformée en Z (dite unilatérale) par :

$$Z\left[x(n)\right] = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n} \tag{7}$$

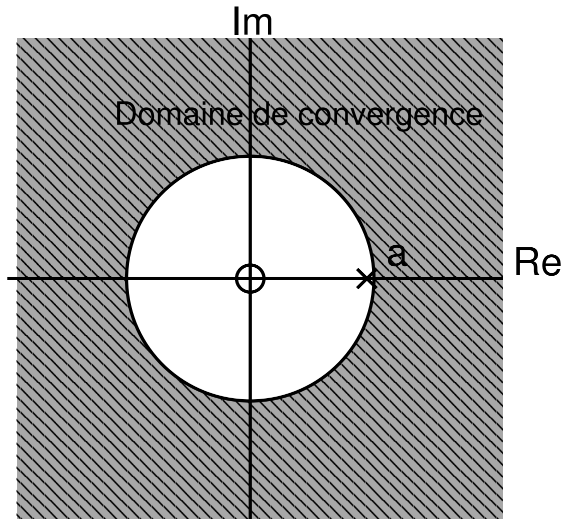
2.2 Domaine de convergence $\mathcal{D}_{CV}$

Dans le cas de la TZ unilatérale, le domaine de convergence correspond à l'extérieur du disque de convergence défini par $|z| > r$.

Le critère de Cauchy appliqué à la TZ donne :

$$\lim_{n \to \infty} |x(n)|^{\frac{1}{n}} = r$$

Exemple : $x(n) = a^n u(n)$



Domaine de convergence avec $r = a$

2.3 Propriétés de la TZ

1. Linéarité

$$x(n) = ax_1(n) + bx_2(n) \rightleftharpoons X(z) = aX_1(z) + bX_2(z)$$

2. Théorème du retard

$$Z\left[x(n-k)\right] = z^{-k}X(z)$$

3. Théorème de l'avance

$$Z\left[x(n+k)\right] = z^{+k}X(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x(n)z^{k-n}$$

4. Dérivation dans l'espace en z

$$Z\left[n.x(n)\right] = Y(z) = -z\frac{d}{dz}X(z)$$

5. Théorème de la valeur initiale

$$x(0) = \lim_{z \to \infty} X(z)$$

6. Théorème de la valeur finale

$$\lim_{n \to \infty} x(n) = x(\infty) = \lim_{z \to 1} \frac{z-1}{z}X(z) = \lim_{z \to 1}(1 - z^{-1})X(z)$$

7. Théorème de la convolution linéaire discrète

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) \rightleftharpoons X(z) = X_1(z)X_2(z)$$

2.4 Transformée en Z inverse

Soit $X(z)$ la transformée en Z du signal $x(n)$. On définit la transformée en Z inverse, la relation déterminant $x(n)$ à partir de $X(z)$ telle que :

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\mathcal{C}} z^{n-1} X(z) dz \tag{8}$$

Il existe trois principales méthodes :

1. l'intégration sur un contour fermé en utilisant le calcul des résidus,
2. le développement en puissance de z et de z^{-1},
3. le développement en fractions élémentaires.

TZ inverse par la méthode des résidus

$$x(n) = \sum_{\text{Tous les pôles } p_i \text{ de } R(z)} \text{Résidus de } R(z) \text{ aux pôles } p_i \qquad (9)$$

avec $R(z) = z^{n-1}X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$ sous forme fractionnelle.

On notera plutôt :

$$x(n) = \sum_{\forall p_i \in \mathcal{D}_{CV}} \mathcal{R}es\left(z^{n-1}X(z), p_i\right) \qquad (10)$$

1. Pôles simples de $R(z)$: p_i tel que $D(z)|_{p_i} = 0$

$$\mathcal{R}es\left(R(z), p_i\right) = \left[(z - p_i)\frac{N(z)}{D(z)}\right]_{z=p_i} \qquad (11)$$

2. Pôles multiples d'ordre m de $R(z)$.

Si $D(z) = (z - p_i)^m F(z)$ avec $F(p_i) \neq 0$ alors

$$\mathcal{R}es\,(R(z), p_i) = \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-p_i)^m \frac{N(z)}{D(z)}\right]_{z=p_i} \quad (12)$$

Exemples :

$$X(z) = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$
$$X(z) = \frac{z}{(z-a)(z-b)}$$
$$X(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$$

TZ inverse par division polynômiale

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^{-n} = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \ldots + c_k z^{-k} + \ldots$$

alors

$$x(n) = c_n$$

Exemples :

$$X(z) = \frac{0.5z}{z^2 - 1.5z + 0.5} = \frac{0.5z^{-1}}{1 - 1.5z^{-1} + 0.5z^{-}}$$

TZ inverse par décomposition en fonctions rationnelles

On décompose $X(z)$ selon :

$$z^{-1}X(z) = \alpha_1 \frac{1}{z-p_1} + \alpha_2 \frac{1}{z-p_2} + \dots \quad (13)$$

On aura alors par TZI :

$$x(n) = \alpha_1 p_1^n + \alpha_2 p_2^n + \dots \quad (14)$$

Exemple : $X(z) = \frac{z}{(z-a)(z-b)}$

Attention au cas des pôles doubles (voir le détail dans le cours de Mathématiques sur les fonctions holomorphes).

3. Transformée de Fourier d'un signal discret

1. Rappels sur les signaux continus
2. TF d'un signal discret non périodique
3. TF d'un signal discret périodique
4. Condition d'existence de la TF
5. Propriétés de la transformée de Fourier
6. Transformée de Fourier discrète

3.1 Rappels sur les signaux continus

Soit un signal analogique $x_a(t)$ dont la transformée de Fourier est définie par :

$$X_a(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j\omega t} dt \tag{15}$$

avec $\omega = 2\pi f$.

On retrouve le signal temporel à partir de sa transformée par la transformée de Fourier inverse définie par la relation suivante :

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \tag{16}$$

3.2 TF d'un signal discret non périodique

Pour un signal $x(n)$ discret quelconque non périodique, sa transformée de Fourier (TF) s'écrit :

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\Omega n} \tag{17}$$

$X(e^{j\Omega})$ peut être exprimé à partir de la transformée en Z par la relation :

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}\Big|_{z=e^{j\Omega}} = X(z)|_{z=e^{j\Omega}} \tag{18}$$

– Cette équation implique que le TF n'existe que si le cercle unité, caractérisé par $z = e^{j\Omega}$, appartient au domaine de convergence de $X(z)$.

– $X(\Omega)$ est *périodique* de période 2π. Ceci implique que **le spectre d'un signal discret est périodique**.

La TF inverse est obtenue à partir de la transformée en Z inverse de $X(z)$. On obtient :

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(e^{j\Omega})e^{jn\Omega}d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega})e^{jn\Omega}d\Omega \qquad (19)$$

Sur la variable *fréquence* f, la TF périodique de période $f_e = 1/T$ s'écrit :

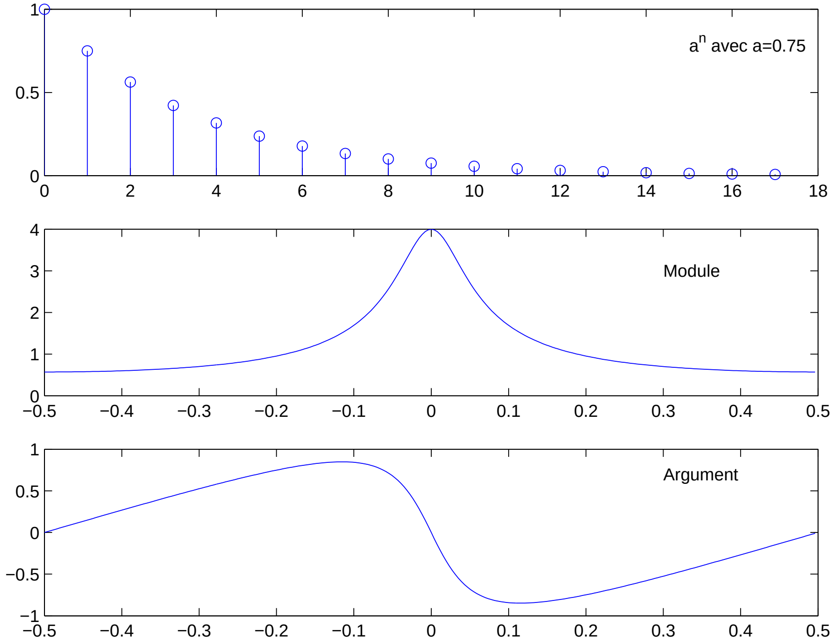
$$X(f) = X(e^{j2\pi fT}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j2\pi fnT} \qquad (20)$$

$$x(n) = \frac{1}{f_e}\int_0^{f_e} X(f)e^{j2\pi fnT}df \qquad (21)$$

TF d'un signal discret non périodique

Exemple :

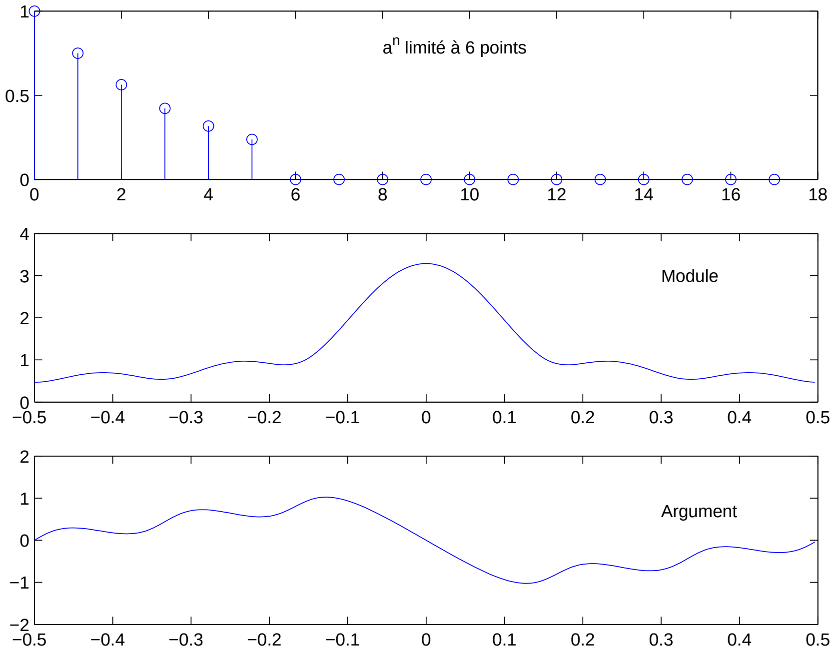
$$x(n) = a^n u(n)$$



TF d'un signal discret non périodique

Exemple :

$$x(n) = a^n, \text{ pour } n = 0 \ldots N-1$$



3.3 TF d'un signal discret périodique

Pour un signal $x_p(n)$ discret périodique de période N, une décomposition en série de Fourier doit être utilisée sous la forme :

$$X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n).e^{(-2j\pi\frac{n.k}{N})},\ k = 0,\ 1\ldots N-1 \qquad (22)$$

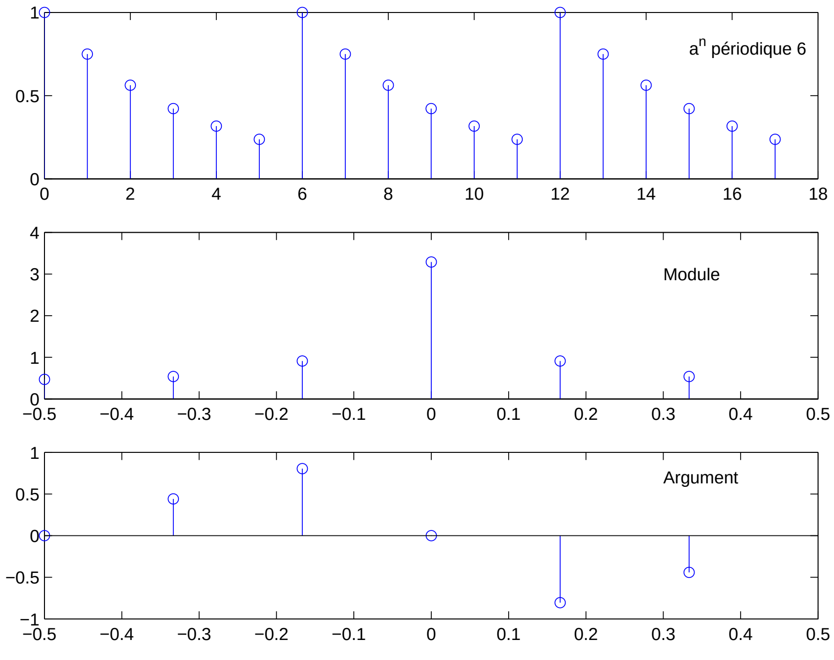
$$x_p(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_p(k).e^{(2j\pi\frac{n.k}{N})},\ n = 0,\ 1\ldots N-1 \qquad (23)$$

Sa Transformée de Fourier s'écrit alors :

$$X_p(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_p(k)\delta\left(\Omega - k\frac{2\pi}{N}\right) \qquad (24)$$

Exemple :

$$x(n) = a^n, \text{ pour } n = 0 \ldots N-1, \text{ périodique } N$$



3.4 Condition d'existence de la TF

Une condition suffisante à la convergence de la TF peut être déterminée comme suit ($x(n)$ est dite *absolument sommable*) :

$$|X(e^{j\Omega})| \quad \leq \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$$

De plus, la série converge uniformément vers une fonction continue de Ω.

Certaines séquences ne sont pas *absolument sommables* mais sont de *carré sommable* (ou à énergie finie), i.e.

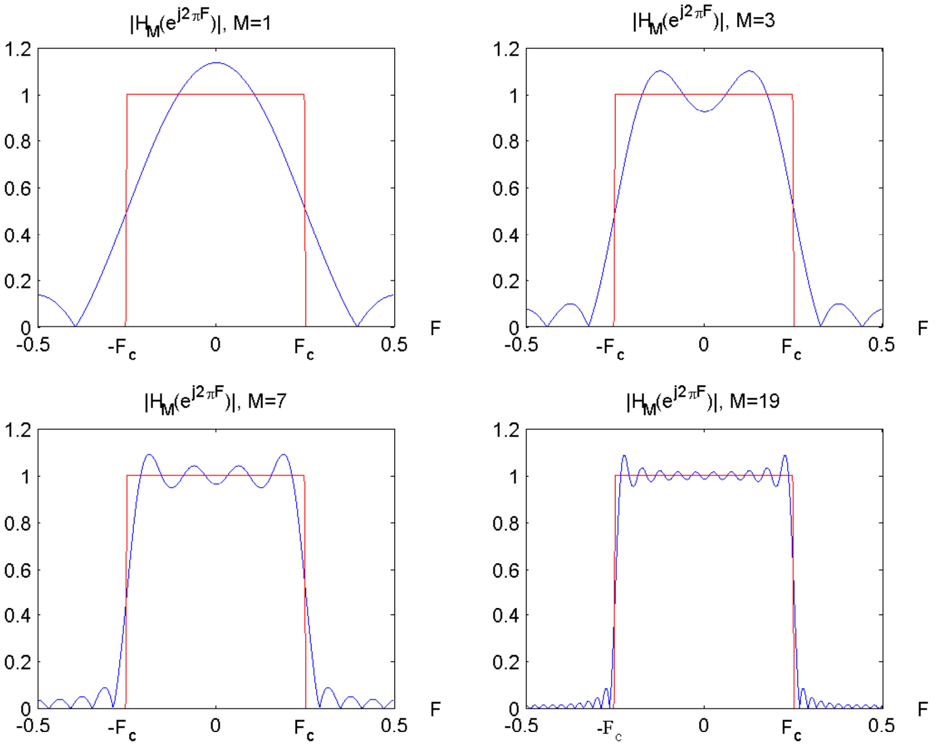
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty \tag{25}$$

Ces séquences peuvent être représentées par une transformée de Fourier mais sans convergence uniforme de la somme infinie définissant $X(e^{j\Omega})$. Cela signifie que l'erreur $|X(e^{j\Omega}) - X_M(e^{j\Omega})|$ ne tend pas vers 0 quand $M \rightarrow \infty$ mais que par contre l'énergie de l'erreur tend vers 0.

Exemple :

$$H(e^{j\Omega}) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \Omega_c \\ 0, & \Omega_c < |\Omega| \leq \pi \end{cases} \rightleftharpoons h(n) = \frac{\sin n\Omega_c}{n\pi}, \quad -\infty < n < \infty$$

$$H_M(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-M}^{M} \frac{\sin n\Omega_c}{n\pi} e^{-jn\Omega}$$



3.5 Propriétés de la transformée de Fourier

– Linéarité ou superposition

$$a.x(n) + b.y(n) \rightleftharpoons a.X(e^{j\Omega}) + b.Y(e^{j\Omega})$$

– Décalage en temps-fréquence

$$x(n - n_0) \rightleftharpoons e^{-jn_0\Omega}X(e^{j\Omega})$$

$$x(n)e^{jn\Omega_0} \rightleftharpoons X(e^{j(\Omega-\Omega_0)})$$

– Dérivation en fréquence

$$n.x(n) \rightleftharpoons j\frac{dX(e^{j\Omega})}{d\Omega}$$

– Produit de convolution

$$x_1(n) * x_2(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_1(i) * x_2(n-i) \rightleftharpoons X_1(e^{j\Omega}).X_2(e^{j\Omega})$$

– Théorème du fenêtrage (ou de la modulation)

$$x_1(n).x_2(n) \rightleftharpoons \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\Theta}).X_2(e^{j(\Omega-\Theta)})d\Theta$$

– Théorème de Parseval (conservation de la puissance d'un signal)

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} |x(i)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\Omega})|^2 d\Omega$$

– Si $x(n)$ est une suite réelle, alors sa TF est symétrique conjuguée (partie réelle et module pairs ; partie imaginaire et phase impaires)

$$x(n) \in \mathbb{R} \rightleftharpoons X(e^{j\Omega}) = X^*(e^{-j\Omega})$$

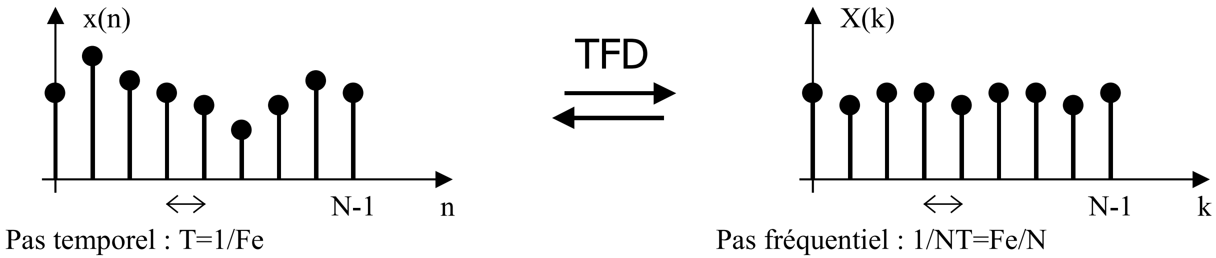
– Densité spectrale d'énergie (pour des signaux à énergie finie)

$$S_E(f) = |X(e^{j2\pi fT})|^2$$

3.6 Transformée de Fourier discrète

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi kn}{N}}, \quad k = 0, \cdots, N-1 \tag{26}$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j\frac{2\pi kn}{N}}, \quad n = 0, \cdots, N-1 \tag{27}$$



– Décalage en temps-fréquence $x(n-n_0) \rightleftharpoons e^{-2j\pi\frac{kn_0}{N}}X(k)$
– Produit de convolution circulaire

$$x_1(n) \circledast x_2(n) = \sum_{i=0}^{N-1} x_1(i) * x_2(n-i) \rightleftharpoons X_1(k).X_2(k)$$

avec $x_1(n)$ et $x_2(n)$ des signaux périodiques de période N.
– Théorème de Parseval (conservation de la puissance d'un signal)

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |x(i)|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

– Propriétés de symétrie $x(n) \in \mathbb{R} \rightleftharpoons X(k) = X^*(N-k)$
– Calcul rapide (*Fast Fourier Transform*, FFT)

4. Systèmes discrets

1. Systèmes linéaires invariants
2. Représentation temporelle
3. Analyse par transformée en Z
4. Représentation fréquentielle

4.1 Systèmes discrets linéaires invariants

1. Un signal d'entrée $e(n)$ est *transformé* en un signal de sortie $s(n)$:

$$s(.) = \mathcal{T}[e(.)]$$

2. Un système est dit *invariant* en temps (ou au décalage) ssi :

$$e(n) \xrightarrow{\mathcal{T}} s(n) \quad \Rightarrow \quad e(n-k) \xrightarrow{\mathcal{T}} s(n-k) \quad \forall e(.), \forall k \in (N)$$

3. Un système est *linéaire* ssi :

$$\mathcal{T}[a \times e_1(n) + b \times e_2(n)] = a \times \mathcal{T}[e_1(n)] + b \times \mathcal{T}[e_2(n)] \quad \forall e_1(.), \forall e_2(.), \forall (a, b)$$

Systèmes linéaires invariants (SLI)

1. Causalité : un système est *causal* si un changement en sortie ne *précède* pas un changement en entrée.

   Un système linéaire invariant est causal si et seulement si $h(n) = 0$ pour $n < 0$.

2. Stabilité : un système est stable si à une entrée bornée correspond une sortie bornée. La condition de stabilité d'un système s'écrit :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| < +\infty$$

Exemples : retard idéal, moyenneur, sans mémoire, ...

Représentation temporelle des systèmes discrets

Stratégie générale d'analyse d'un système linéaire invariant :

1. Décomposition du signal d'entrée en une somme de signaux ou fonctions de base.

$$e(n) = \sum_k \alpha_k e_k(n)$$

2. Etude de la réponse du système pour l'ensemble des fonctions de base.

$$s_k(n) = \mathcal{T}[e_k(n)]$$

3. Recomposition de la sortie en appliquant le principe de superposition.

$$s(n) = \sum_k \alpha_k s_k(n)$$

Produit de convolution

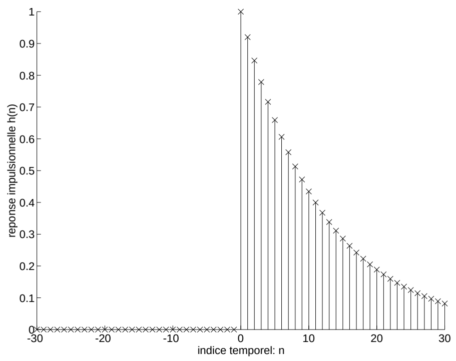
$$
\begin{aligned}
e(n) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e(k)\delta(n-k) \\
s(n) &= \mathcal{T}[e(n)] = \mathcal{T}[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e(k)\delta(n-k)] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e(k)\mathcal{T}[\delta(n-k)]
\end{aligned}
$$

On pose $h(n) = \mathcal{T}[\delta(n)]$, alors

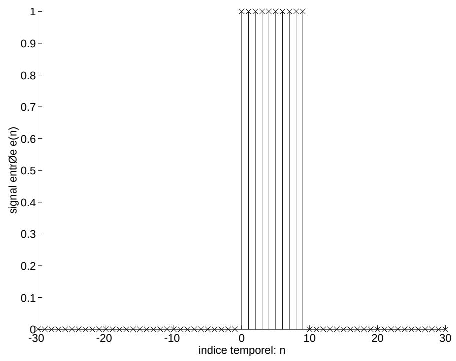
$$s(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e(k)h(n-k) = e(n) * h(n) = h(n) * e(n)$$

Un système discret est donc entièrement caractérisé par sa *réponse impulsionnelle* $h(n)$. L'opération $*$ liant la sortie $s(n)$ à l'entrée $e(n)$ et à la réponse impulsionnelle du système $h(n)$ est appelée produit de convolution.

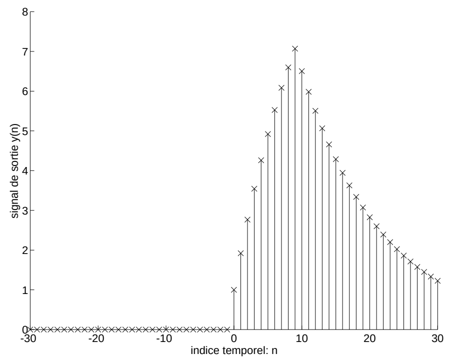
Exemple



$h(n)$: réponse impulsionnelle



$e(n)$: entrée du système



$s(n)$: réponse du système à l'entrée

Equation aux différences finies

Une équation aux différences finies peut s'écrire sous la forme :

$$s(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k s(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k e(n-k) \quad (28)$$

- Système *récursif* ou *non-récursif*
- Réponse impulsionnelle infinie (RII *ou IIR*) ou finie (RIF *ou FIR*)

Fonction de transfert en z

La fonction de transfert en z $H(z)$ d'un système est définie par :

$$H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} \tag{29}$$

$H(z)$ **est également la transformée en** Z **de la réponse impulsionnelle** $h(n)$ **du système.**

À partir de l'équation aux différences (28), on obtient :

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{N(z)}{D(z)} \tag{30}$$

ou

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{N-k}}{z^N + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{N-k}} \tag{31}$$

ou en faisant apparaître les pôles et les zéros :

$$H(z) = b_0 z^{N-M} \frac{\prod_{i=1}^{M}(z - z_i)}{\prod_{i=1}^{N}(z - p_i)} = b_0 \frac{\prod_{i=1}^{M}(1 - z_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^{N}(1 - p_i) z^{-1}} \tag{32}$$

L'équation précédente permet de tracer dans le plan complexe le **diagramme des pôles et des zéros**.

4.3 Analyse des systèmes discrets par la transformée en Z

Soit le système décrit par $S(z) = H(z)E(z)$, il s'agit de **caractériser** $s(n)$.

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}, \quad E(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

On a donc :

$$S(z) = \frac{N(z)P(z)}{D(z)Q(z)}$$

$$s(n) = TZ^{-1}\left[S(z)\right]$$

Sous la condition d'unicité des pôles et des zéros, on peut écrire $Y(z)$ sous la forme :

$$S(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{D_k}{1 - p_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{L} \frac{Q_k}{1 - q_k z^{-1}}$$

$$s(n) = \underbrace{\sum_{k=1}^{N} D_k p_k^n u(n)}_{\text{régime naturel}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{L} Q_k q_k^n u(n)}_{\text{régime forcé}}$$

L'équation précédente montre que le signal de sortie peut être considéré comme composé de deux parties :

– une réponse en régime naturel (termes en p_k), appelée réponse transitoire si $|p_k| < 1 \quad \forall k$.
– une réponse en régime forcé (termes en q_k).

Analyse des systèmes discrets par la transformée en Z

Condition de stabilité :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

Un SLI causal est **stable si et seulement si tous les pôles de sa fonction de transfert sont à l'intérieur, strictement, du cercle unité**.

4.4 Représentation fréquentielle des systèmes discrets

Soit l'entrée $e(n) = e^{jn\omega T} = e^{jn\Omega}$ pour $-\infty < n < +\infty$ d'un SLI de réponse impulsionnelle $h(k)$. La sortie peut alors s'écrire :

$$s(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{j(n-k)\Omega} = e^{jn\Omega} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-jk\Omega}$$

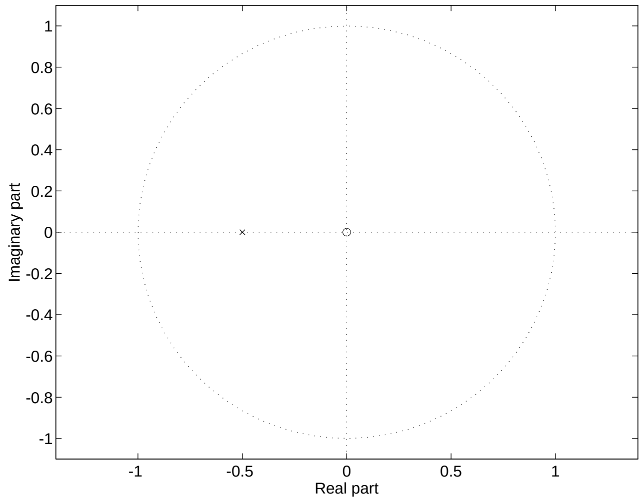
$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-jk\Omega}$$

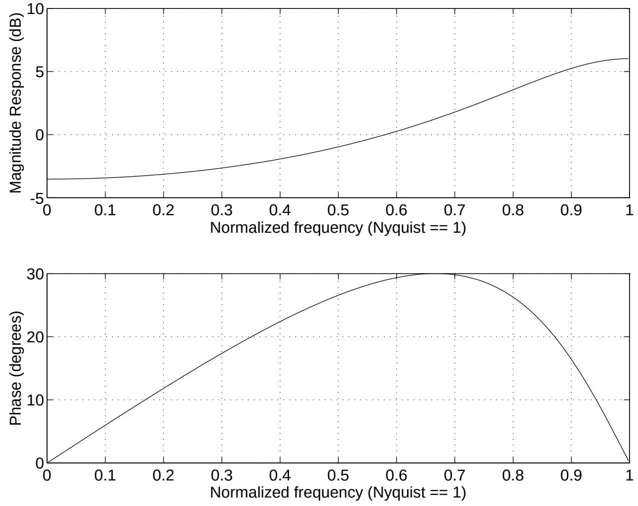
$H(e^{j\Omega})$ est appelé *réponse fréquentielle* du système. On étudie son module et sa phase :

$$H(e^{j\Omega}) = |H(e^{j\Omega})|e^{jarg[H(e^{j\Omega})]}$$

Exemple :

$$H(z) = \frac{1}{1 + 0.5z^{-1}}$$





5. Échantillonnage et reconstruction des signaux

5.1 Échantillonnage idéal : soit un signal analogique $x_a(t)$ défini par sa TF :

$$x_a(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_a(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{33}$$

L'échantillonnage de $x_a(t)$ est défini par $x(n) = x_a(t)|_{t=nT}$

Le signal discret $x(n)$ est défini par :

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(j\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega \tag{34}$$

On trouve la relation suivante entre les TF de $x(n)$ et de $x_a(t)$:

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(\frac{j\Omega}{T} + \frac{j2\pi k}{T}\right) \qquad (35)$$

Le spectre du signal numérique est donc composé d'une somme infinie de versions décalées du signal analogique.

5.2 Théorème d'échantillonnage de Shannon

Il est possible de reconstruire le signal continu à partir du signal discret si le signal analogique est à bande limitée, i.e. $X(\omega)$ est nulle pour $|\omega| > \omega_{\max}$

On obtient alors :

$$\omega_{\max} < \frac{2\pi}{T} - \omega_{\max} \tag{36}$$

$$2f_{\max} < f_N \quad \text{avec} \quad f_N = \frac{1}{T} \tag{37}$$

f_N est la fréquence limite d'échantillonnage ou encore appelée fréquence de Nyquist.

Exemple pratique d'échantillonnage

Soit un signal analogique $x_a(t)$ correspondant à une sinusoïde de fréquence $f = 0.5\mathrm{Hz}$ et défini par :

$$x_a(t) = 5\sin(2\pi 0.5t) \quad \text{avec} \quad -2 \leq t \leq +2$$

La fréquence de Nyquist correspond à $f_N = 2 * 0.5 = 1\mathrm{Hz}$.